VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

Жирков В.Ф., Новиков К.В., Сушкова Л.Т.

Владимирский государственный университет

Введение

В геологии, медицине, промышленности, военном деле, системах безопасности часто встречаются задачи, требующие обнаружения и локализации источников или аномалий магнитного поля – некорректные обратные задачи магнитостатики [1, 2, 3, 4]. Один из методов решения таких задач – метод регуляризации Тихонова [5]. В статье описаны результаты экспериментального исследования эффективности этого метода для решения задачи локализации источников магнитного поля.

Решение прямой задачи магнитостатики

В экспериментах использовалась модель источника магнитного поля в виде множества магнитных диполей, расположенных в узлах равномерной трехмерной прямоугольной сетки.

Вектор магнитной индукции для диполя, находящегося в начале координат, определяется по формуле

$$\vec{B}(\vec{M},\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^3}\left(\frac{3(\vec{M}\cdot\vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^2} - \vec{M}\right), \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, в которой определяется $\vec{B}$, $\vec{M}$ – вектор магнитного момента диполя, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. Формула (1) может быть представлена в форме произведения

$$\vec{B}(\vec{M},\vec{r}) = A(\vec{r})\vec{M}, \qquad (2)$$

где $A(\vec{r})$ – матрица 3x3, определяющаяся положением точки пространства, в которой рассчитывается $\vec{B}$, относительно магнитного диполя. В случае, когда источниками магнитного поля являются ***m*** диполей, и необходимо выполнить расчет в ***n*** точках, прямая задача магнитостатики заключается в вычислении

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ \dots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ \dots \\ M_m \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где B_i – вектор магнитной индукции в точке ***i***, M_j – вектор магнитного момента ***j***-го диполя, A_{ij} – матрица, зависящая от взаимного положения диполя и точки, в которой выполняется расчет поля.

Решение обратной задачи магнитостатики

Обратная задача магнитостатики заключается в вычислении параметров источников магнитного поля по множеству измерений магнитной индукции в заданных точках пространства. Решение обратной задачи может быть найдено следующим образом

$$M^* = \arg\min\left(\|AM - B\|^2\right), \qquad (4)$$

$$M^* = A^\dagger B = (A^T A)^{-1} A^T B.$$

Однако матрица ***A*** является плохо обусловленной, поэтому точное решение (4) оказывается крайне неустойчивым и, как правило, весьма далеким от реального. Применение регуляризации Тихонова [5] позволяет корректно сформулировать обратную задачу магнитостатики и гарантирует существование, единственность и устойчивость получаемой реконструкции.

Концепция регуляризации сводится к замене задачи (4) на задачу о минимизации функционала

$$M^* = \arg\min\left(\|AM - B\|^2 + \lambda^2\|LM\|^2\right), \qquad (5)$$

где L – регуляризирующий оператор в матричной форме, λ – параметр регуляризации. В решении обратной задачи в качестве регуляризирующего оператора был выбран дискретный трехмерный оператор Лапласа. Таким образом, на решение задачи накладывается дополнительное ограничение, требующее гладкости распределения магнитных моментов элементарных диполей в пространстве. Оптимальное значение коэффициента λ может быть выбрано с помощью метода, описанного в [6].

Описанный подход сводит некорректную обратную задачу магнитостатики к условно-корректной (по Тихонову) задаче отыскания решения (5).

Экспериментальное исследование

Для экспериментального исследования был выбрана модель объекта, представляющая собой кубическую область пространства размером 5x5x5 элементов. Длина стороны элемента – 0,1 м. Сечения тестовой области приведены на рис. 1. Элементы, отмеченные белым, содержат магнитные диполи с вектором магнитного момента $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

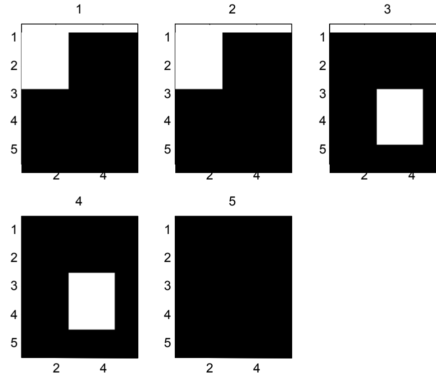


Рис.1. Модель тестового объекта

Датчики, измеряющие магнитную индукцию, были случайным образом расположены на сфере с диаметром 1 м, окружающей кубическую область.

В ходе вычислительного эксперимента по формуле (3) находились значения векторов магнитной индукции на датчиках; полученные значения искажались аддитивным шумом, имеющим равномерное распределение; решения находились методом (5) для 250 датчиков (переопределенная задача), 125 датчиков, 62 датчиков (недоопределенная задача).

Результаты решения для различного числа датчиков и при различных уровнях шума приведены на рис. 2. На рис. 3 приведены зависимости относительной ошибки значений магнитных моментов от отношения сигнал/шум.

Заключение

Как показал вычислительный эксперимент, метод регуляризации Тихонова дает при достижимых уровнях шума приемлемое для задач визуализации устойчивое решение обратной задачи магнитостатики даже в случае, когда количество датчиков значительно меньше количества анализируемых элементов объема. Описанный метод может быть использован в решении инженерных задач, связанных с необходимостью локализации и визуализации источников магнитного поля.

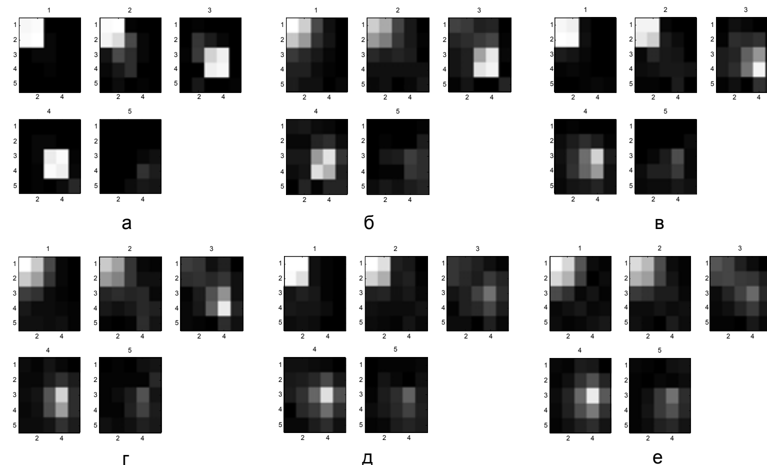


Рис. 2. Результаты решения обратной задачи (а – 250 датчиков, С/Ш=10^{-6}; б – 250 датчиков, С/Ш=10^{-2}; в – 125 датчиков, С/Ш=10^{-6}; г – 125 датчиков, С/Ш=10^{-2}; д – 62 датчика, С/Ш=10^{-6}; е – 62 датчика, С/Ш=10^{-2})

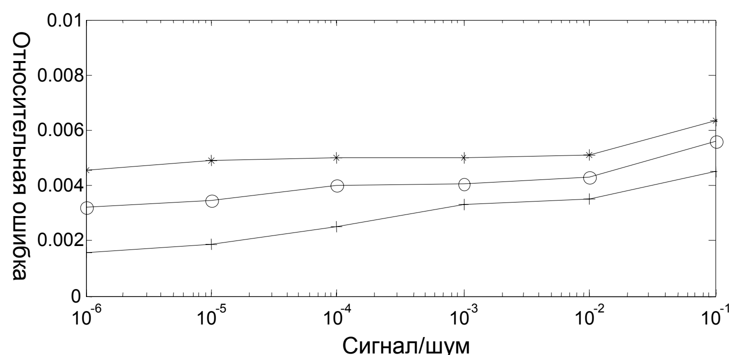


Рис. 3. Зависимость относительной ошибки от отношения сигнал/шум для недоопределенной (*), нормальной (о) и переопределенной (+) задачи

Литература

1. P.V. Czipott, M.D. Iwanowski, Magnetic sensor technology for detecting mines, UXO, and other concealed security threats. Proceedings SPIE No. 2933, Conference on Terrorism and Counterterrorism Methods and Technologies, Boston, MA, USA, 20-21 Nov. 1996, pp. 67-76.
2. J. C. Michael, S. L. Withanawasam, Vehicle Detection and Compass Applications using AMR Magnetic Sensors// www.ssec.honeywell.com.
3. M. Hamalainen, R. Hari, R. Ilmoniemi, J. Knuutila, O. Lounasmaa, Magnetoencephalography – theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. Rev Mod Phys, 65: 1-93.
4. O. Portniaguin, M.S. Zhdanov, 3-D magnetic inversion with data compression and image focusing// Geophysics, vol. 67, No.5 (September-October 2002); P. 1532–1541
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
6. P.C. Hansen, D.P. O'Learly, The use of the L-curve in regularization of discrete ill-posed problems, SIAM J. Sci. Comput. 14 (1993), P. 1487-1503.

